$t \longmapsto \dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2}(t^2-1)$

est continue sur $[0,1]$

Donc

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}(t^2-1)\,dt \leq 0$$

donc $\boxed{U_{n+1} - U_n \leq 0}$

$\Rightarrow$ $\boxed{(U_n) \text{ est décroissante}}$

b-) Prouver que la suite est convergente.

on a $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

$t \longmapsto \dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$

$\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \geq 0$

donc $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \geq 0$

donc U_n minorée par 0